

Uvod u obradu i analizu zvučnih signala valićem

Naziv valićem, wavelet, je određete znači moći vala. To je matematička funkcija koja se koristi s ciljem podjele zadane funkcije na različite frekvencijske komponente. Tada možemo promatrati svaku komponentu u najmanjem različitom dijelu. Sinusoida je primjer velikog vala. Pokazuje porast i slabljenje unutar beskonačnog vremenskog intervala. Za razliku od sinusoida moći val - ili valić - pokazuje porast i slabljenje unutar konačnog vremenskog intervala. Kako bi ga klasificirali mora zadovoljiti tri svojstva...

1. UVOZ
- 1.1. Konverzijani (obradeni) signali i DSP
- 1.2. Analiza u vremenskoj i frekvencijskoj području
- 1.3. DSP transformacije
- 1.4. Projektiranje signala u 3D
2. Zadani signal snime realističnijih HD Audio
3. Ograničavanje signala
4. Sadržajne svojstva signala
5. Osnovna svojstva valića
6. Osnovna svojstva valića
7. Osnovna svojstva valića
8. Osnovna svojstva valića
9. Osnovna svojstva valića
10. Osnovna svojstva valića
11. Osnovna svojstva valića
12. Osnovna svojstva valića
13. Osnovna svojstva valića
14. Osnovna svojstva valića
15. Osnovna svojstva valića
16. Osnovna svojstva valića
17. Osnovna svojstva valića
18. Osnovna svojstva valića
19. Osnovna svojstva valića
20. Osnovna svojstva valića
21. Osnovna svojstva valića
22. Osnovna svojstva valića
23. Osnovna svojstva valića
24. Osnovna svojstva valića
25. Osnovna svojstva valića
26. Osnovna svojstva valića
27. Osnovna svojstva valića
28. Osnovna svojstva valića
29. Osnovna svojstva valića
30. Osnovna svojstva valića
31. Osnovna svojstva valića
32. Osnovna svojstva valića
33. Osnovna svojstva valića
34. Osnovna svojstva valića
35. Osnovna svojstva valića
36. Osnovna svojstva valića
37. Osnovna svojstva valića
38. Osnovna svojstva valića
39. Osnovna svojstva valića
40. Osnovna svojstva valića
41. Osnovna svojstva valića
42. Osnovna svojstva valića
43. Osnovna svojstva valića
44. Osnovna svojstva valića
45. Osnovna svojstva valića
46. Osnovna svojstva valića
47. Osnovna svojstva valića
48. Osnovna svojstva valića
49. Osnovna svojstva valića
50. Osnovna svojstva valića
51. Osnovna svojstva valića
52. Osnovna svojstva valića
53. Osnovna svojstva valića
54. Osnovna svojstva valića
55. Osnovna svojstva valića
56. Osnovna svojstva valića
57. Osnovna svojstva valića
58. Osnovna svojstva valića
59. Osnovna svojstva valića
60. Osnovna svojstva valića
61. Osnovna svojstva valića
62. Osnovna svojstva valića
63. Osnovna svojstva valića
64. Osnovna svojstva valića
65. Osnovna svojstva valića
66. Osnovna svojstva valića
67. Osnovna svojstva valića
68. Osnovna svojstva valića
69. Osnovna svojstva valića
70. Osnovna svojstva valića
71. Osnovna svojstva valića
72. Osnovna svojstva valića
73. Osnovna svojstva valića
74. Osnovna svojstva valića
75. Osnovna svojstva valića
76. Osnovna svojstva valića
77. Osnovna svojstva valića
78. Osnovna svojstva valića
79. Osnovna svojstva valića
80. Osnovna svojstva valića
81. Osnovna svojstva valića
82. Osnovna svojstva valića
83. Osnovna svojstva valića
84. Osnovna svojstva valića
85. Osnovna svojstva valića
86. Osnovna svojstva valića
87. Osnovna svojstva valića
88. Osnovna svojstva valića
89. Osnovna svojstva valića
90. Osnovna svojstva valića
91. Osnovna svojstva valića
92. Osnovna svojstva valića
93. Osnovna svojstva valića
94. Osnovna svojstva valića
95. Osnovna svojstva valića
96. Osnovna svojstva valića
97. Osnovna svojstva valića
98. Osnovna svojstva valića
99. Osnovna svojstva valića
100. Osnovna svojstva valića

Ciljevi i motivacija analize valićem

Ciljevi

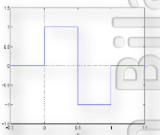
- Definicija i ilustriranje razlike stacionarnih i nestacionarnih signala.
- Opisati odnos valića i potpojasnog kodiranja signala kvadraturnim zrcalnim filtrom sa svojstvima idealne rekonstrukcije.
- Ilustrirati višerasznu dekompoziciju signal u aproksimaciju i komponente detalja valić dekompozicijskim filtrom.
- Prikazati tri tipa wavelet transformacije: kontinuirane (CWT), diskretne (DWT) i multirezolucijske analiza (MRA)
- Usporediti FFT, kratkotrajnu STFT i WT nestacionarni signala
- Ilustrirati primjenu analize valićem u MATLAB-u pri potiskivanju šuma, sažimanja signala i identifikacije impulsnih osobina signala.

Motivacija

- Praktični signali su najčešće nestacionarni, što znači da im se karakteristike u vremenskom području i frekvencijskom području mijenjaju u vrlo kratkim vremenskim intervalima. Primjer: glazbeni signali, seizmički signali, itd...
- Furirova transformacija podrazumijeva signal koji je ili beskonačnog trajanja ili stacionaran unutar vremenskog otvora analize.
- Nestacionarna analiza zahtjeva različiti pristup: analizu pomoću valića

Uvod

Valići su klasa funkcija koji lokaliziraju zadanu funkciju po položaju i skali. Koriste se za primjenu obrade signala i analize vremenskih redova. Valići su temelj wavelet transformacije koja dijeli podatke funkcija ili operatora u različite frekvencijske komponente, a zatim analizira svaku komponentu u rezoluciji koja je prilagođena njenoj skali. U kontekstu obrade signala wavelet transformacija ovisi o dvije varijable: **skale** ili **frekvencije** i **vremena**.



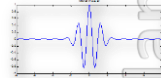
Postoje tri tipa wavelet transformacije: **kontinuirana (CWT)**, **diskretna (DWT)** i **multirezolucijska analiza (MRA)**

Kontinuirana obrađuje funkcije definirane na cijeloj realnoj osi. **Diskretne** obrađuje funkcije definirane unutar područja cjelobrojnih vrijednosti (najčešće $t = 0, 1, \dots, N-1$, gdje N označava redni broj elementa vremenski promjenjivog reda).

Multirezolucijska predstavlja samu bit teorije valića.

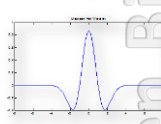
Najstarija valić funkcija je **Haar wavelet**, koji je nazvan po A. Haar koji je otkrio 1910. Slika prikazuje dilataciju i translaciju Haarovog valića.

Valić je oscilatorni val s amplitudom koja počinje od nule, ima porast ili otklajaciju i završava na nuli. Vizualiziramo ga kao **kratkotrajnu oscilaciju**, a projektiramo ga sa specifičnim svojstvima koja ga čine korisnim za obradu signala.



Valićem možemo kombinirati **konvolucijom** s nepoznatim signalom kako bi iz njega dobili potrebnu informaciju.

Kao matematički alat valićem možemo dobiti informacije iz različitih podataka u prvom redu zvučnih signala i slika. Općenito su potrebni **skupovi valića** kako bi potpuno analizirali zadane signale.

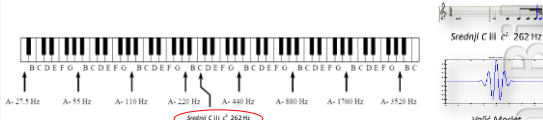


Skupovi komplementarnih valića izvršit će potpuno **dekonstrukciju podataka bez gubitaka** pa je postupak dekonstrukcije zvučne datoteke primjenom valića matematički reverzibilan.

Dakle, skupovi komplementarnih valića su korisni za primjenu algoritama analize, sinteze, sažimanja i dekompresije datoteka.

Primjer: Imamo zvučnu datoteku sa snimljenom klavirskom glazbom, a interesira nas kada je i koliko puta odsvirana nota **c¹ 262Hz**?

Projektiramo valić tako da mu je **frekvencija srednji C** ili **c¹ 262Hz** tako da mu je trajanje 1/64 dijela cijele note; to je najkraća nota.



Klavijatura predstavlja **logaritamsku frekvencijsku skalu**, s podvostručenjem **fundamentalne frekvencije** nakon svakih sedam dijelnih tipki. Bijele tipke su note: A, B, C, D, E, F, i G.

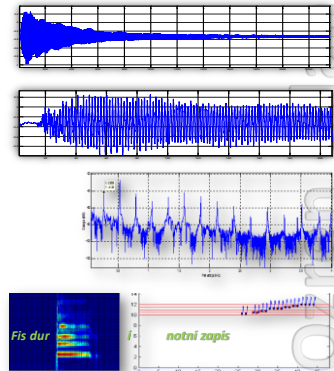
Ako u kratkim periodičnim intervalima valić **konvoluiramo** sa signalom, rezultat konvolucije odredit će izvođenje note **c¹**. Matematički, **valić će rezonirati samo ako nepoznat signal sadržava informaciju slične frekvencije**. Opisani koncept rezonancije je sama bit praktične primjene.

Projektiramo li valić za svih 88 nota spektra klavira i izvršimo konvoluciju sa zvučnom datotekom **dobit ćemo notni zapis** bilo koje glazbe.

```
[snd, sampFreq, nBt] = wavread('1_01.wav');
sBt=length(snd);
sps=sampFreq/1000;
s1=snd(:,1);
timeArray=@(t) 1000*t/sps; % u milisekundi
timeArray=timeArray*1000; % u milisekundi
plot(timeArray, s1)
grid;

ans = 104158 1

p = fft(s1);
p=fft(p,1); % proračunava fourierovu transformaciju
nT=nBt/sps; % u milisekundi
% izdaje prvu polovinu jer je druga polovina
% zrcalna slika prv
p = abs(p); % u milisekundi
% izdaje prvu polovinu jer je druga polovina
% zrcalna slika prv
p = p/n; % skalira s brojem točaka signala pa
% magnitudu ne ovisi o dužini signala
% niti o frekvenciji sampranja
p = p/2; % iskoristimo da dobijemo snagu
% imamo i dva
if rem(n,2) % neparno nftf korijenuje Nyquistovu točku
p(n/2) = p(n/2)/2;
else
p(n/2-1) = p(n/2-1)*2;
end
freqArray = (0:nBt/2-1) * (1/sampFreq/n);
% kreće frekvencijsku postavu
plot(freqArray/1000, 10*log10(p))
grid;
xlabel('Frekvencija (kHz)')
ylabel('Snaga (dB)')
---
```



Pogledajmo sinusoidu kao primjer **valića vala**. Pokazuje porast i slabljenje unutar beskonačnog vremenskog intervala.

Za razliku od sinusoida **malih val** - ili valić pokazuje porast i slabljenje unutar **konačnog vremenskog intervala**.

Valić je funkcija malog vala, koju označavamo $\psi(t)$.

Želimo li funkciju $\psi(t)$, određenu na realnoj osi $(-\infty, \infty)$ klasificirati kao valić ona mora zadovoljavati tri svojstva:

(1) Integral $\psi(t)$ jednak je 0:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

(2) Integral kvadrata $\psi(t)$ jednak je 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt = 1$$

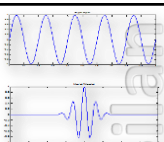
(3) Uvjet dopustivosti:

$$C_{\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{|f|} df < \infty$$

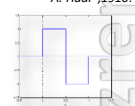
Prvi uvjet pokazuje nam da se pomak funkcije valića ψ iznad nule mora poništiti pomakom ispod nule. Pravač $\psi(u) = 0$ taj uvjet zadovoljava.

Drugi uvjet nam pokazuje da pomak funkcije ψ mora biti konačan.

Ako je zadovoljen i treći uvjet dopustivosti tada se **signal koji analiziramo može rekonstruirati kontinuiranom wavelet transformacijom**.



Najstarija wavelet funkcija je **Haarova wavelet**, prema **A. Haar**, 1910:

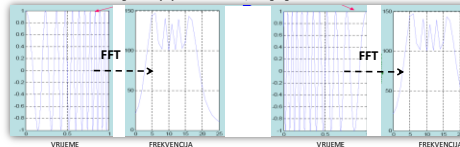


$$\psi^{(H)}(u) = \begin{cases} +1 & 0 \leq u < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq u < 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

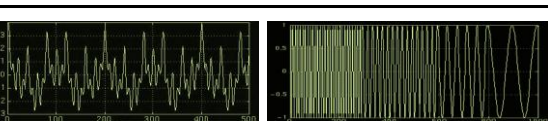
Wavelet analiza: FFT i wavelet

Fourierova analiza pokazuje sastav zadane funkcije sinusoidalnim valovima različitih frekvencija i amplituda. To je sasvim dovoljno ako analiziramo stacionarnu funkciju. Međutim, ako je frekvencija vremenski promjenjiva, Fourierova analiza nam **ne može pokazati kada i gdje se promjena dogodila**. Furierova analiza nam pokazuje **srednju promjenu frekvencije za vrijeme trajanja funkcije**. Pretpostavimo signal koji se u s u mijenja od 2 Hz do 20 Hz a drugi signal koji se mijenja od 20 Hz do 2 Hz pa napravimo FFT.

Prvi signal se mijenja od 2 Hz do 20 Hz, a drugi signal od 20 Hz do 2 Hz

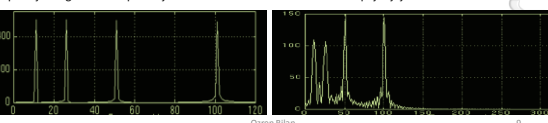


- **FFT prvog i drugog signala su potpuno isti**
- **FFT daje samo frekvenciju u signalu, a ne daje vrijeme promjene**
- **U FFT ne možemo istovremeno vidjeti vremensku i frekvencijsku informaciju.**
- **Signal moramo prikazati vremensko frekvencijski.**
- **Većina signala su nestacionarni. Moramo znati kada i gdje se promjena dogodila.**



Izračunat ćemo FFT a) **stacionarnog** signala $x(t) = \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t)$
 b) **nestacionarnog** signala sukcesivnog slijeda sinusoida od 100, 50, 25 i 10 Hz.

Dva vremenski potpuno različita signala imaju identičnu Fourierovu transformaciju: četiri spektralne komponente koje se pojavljuju na frekvencijama od 10, 25, 50 i 100 Hz iako se one vremenski različito pojavljuju. U prvom signalu sve frekvencijske komponente traju jednako kroz signal od samog početka (stacionaran signal), dok se u drugom te iste komponente pojavljuju sukcesivno i traju samo određen period vremena (nestacionaran signal). Različite amplitudne visine u drugom signalu posljedica su naglih promjena frekvencije i različitim trajanjem te ih možemo zanemariti. Očito, Fourierova transformacija ne daje odgovore na pitanje vremenske lokalizacije frekvencijskih komponenti. Pokazuje koje frekvencije postoje u signalu ali ne pokazuje ništa o tome kada se one vremenski pojavljuju.



Analizirat ćemo s FFT, kratkotrajnom STFT i WT nestacionarni signala koji se sastoji od četiri grupe slijeda impulsa. U svakoj grupi signal je sastavljen od dominantnih komponenti 650 i 1500 Hz.

FFT

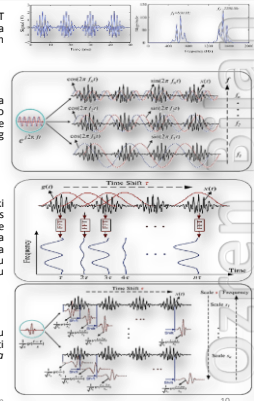
Fourierova transformacija je u biti konvolucija $x(t)$ i niza sinusnih i kosinusnih funkcija koje možemo shvatiti kao šablonu. Operacija mjeri sličnost $x(t)$ i funkcija šablone te izražava srednju frekvencijsku informaciju za vrijeme cijelog perioda analize signala.

STFT

Identificiraju ključuju prozorsku funkciju $g(t)$. Vremenski lokalizirana Fourierova transformacija izvodi se na signalu s prozorom. Nakon toga, protokom vremena, prozor se zatvara i izvodi se još jedna transformacija. Podrazumijeva se da je segment signala unutar vremenskog prozora stacionaran. Kao rezultat, STFT vrši dekompoziciju signala u 2D vremensko-frekvencijskom području pa se otkrivaju frekvencijske varijacije unutar funkcije prozora.

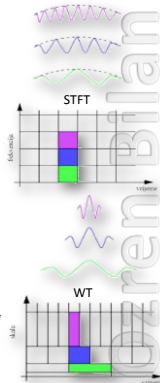
WT

Wavelet transformacija omogućava promjenu veličinu prozora pri analizi različitih frekvencijskih komponenti signala. Dobije se **usporobom signala sa nizom funkcija koje su nastale skaliranjem i translacijom temeljnog valića**.



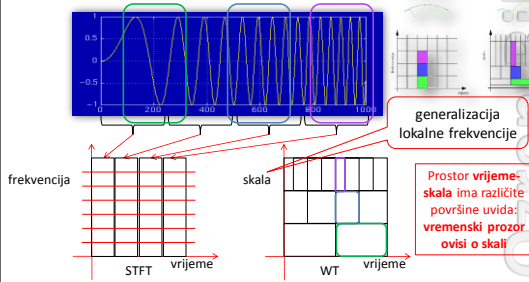
Iako je riječ o potpuno različitim signalu FT je dala istu frekvencijsku sliku. Ako postoji diskontinuitet signala FT neće dati dobar signal tranzijentnog signala. Prozorska ili kratkotrajna FT (STFT) temeljena je na uvođenju prozorske funkcije i translacijom prozora postiže se vremenska lokalizacija uz navedenu frekvenciju. Međutim i ona ima nedostata - problem rezolucije prikazana na slici desno. STFT izborom prozorske funkcije $h(t)$ određuje širinu prozora u vremenskom i frekvencijskom području. Ako promatrani signal ima dosta brzih i sporih promjena širina prozora bit će neodgovarajuća. Zbog toga je uvedena **valićna transformacija**, najviše zbog DSP primjenjivosti algoritama.

Valićna transformacija uključuje translaciju (pomak) valića u vremenskom području i skaliranje (širenje i sužavanje) u frekvencijskom, pa se prozorska funkcija mijenja. Tako se na niskim frekvencijama (visoka skala) postiže dobro razlaganje u frekvencijskom području. U području visokih frekvencija (skala malih vrijednosti) postiže se dobra vremenska razlučivost, a loša frekvencijska. **Valićna transformacija** omogućuje vremensko-frekvencijsku analizu signala. Problem rezolucije vezan uz **Heisenbergov princip neodređenosti** primijenjen na signale: **ne možemo znati koja se frekvencija pojavljuje u točno određenom vremenskom trenutku**. Najbolje što možemo učiniti jest reći koji se skup o frekvencija pojavljuju u kojem vremenskom intervalu. **Ne možemo istodobno postići i visoku vremensku i visoku frekvencijsku rezoluciju**. To je fundamentalni prirodni princip. Pomak se može napraviti na transformacijskom polju. Ono što možemo učiniti jest prilagoditi transformaciju shodno činjenici da se **visoke frekvencije bolje razlažu vremenski, a niske bolje frekvencijski**.



Analiza vrijeme-frekvencija i vrijeme-skala

- Potrebno nam je signal analizirati vremensko frekvencijski
- Izvodimo FT u vremenskom prozoru



Wavelet analiza nam govori kako se zadana funkcija periodično mijenja. To nam omogućava promjena *wavelet funkcije* promjenom **skale** i **položaja** prema zadanoj funkciji.

Wavelet analiza je fleksibilna jer možemo izabrati specifični tip valića koji je najbolje prilagođen funkciji koju ispitujemo. U klasičnoj *Fourierovoj analizi* temelj analize su sinusni i kosinusni valni oblici.

Funkcija $\psi(\cdot)$ se općenito promatra kao matični valić iz kojeg nastaju drugi valići. Dvostruko indeksirana (λ, t) familija valića kreira se translacijom i dilatacijom matičnog valića:

$$\psi_{\lambda,t}(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right)$$

gdje je $\lambda > 0$, a t je konačno.

Normalizacija desne strane jednadžbe, bira se tako da je $|\|\psi_{\lambda,t}\| = \|\psi\|$ za sve λ, t . Vidjet ćemo da se λ i t mogu diskretno ili kontinuirano semplirati.

Neke funkcije možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju u diskretnom slučaju ili kao integral u kontinuiranom slučaju. Izabrane familije valića su bez ikakvih gubitaka informacije sadržane u toj funkciji.

Kontinuirana Wavelet transformacija

CWT se koristi za transformaciju funkcije ili signala $x(\cdot)$ koji je definiran u kontinuiranom vremenu. Dakle, parametri λ i t koji kreiraju obitelj valića, kontinuirano se vremenski mijenjaju.

Idea transformacije: za zadanu dilataciju λ i translaciju t matičnog valića ψ , računamo amplitudni koeficijent koji čini $\psi_{\lambda,t}$ najboljom prilagodbom signala $x(\cdot)$ – integriramo umnožak signala s funkcijom valića:

$$\langle x, \psi_{\lambda,t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\lambda,t}(u)x(u)du$$

Mijenjanjem λ , doznajemo kako se funkcija valića prilagođava signalu iz dilatacije u dilataciju.

Mijenjanjem t , vidimo kako se priroda signala mijenja vremenski.

Skup koeficijenata $\{\langle x, \psi_{\lambda,t} \rangle \mid \lambda > 0, -\infty < t < \infty\}$ nazivamo CWT od $x(\cdot)$. Temeljno svojstvo CWT je da ona sačuva sve informacije izvornog signala $x(\cdot)$.

Ako funkcija valića $\psi(\cdot)$ zadovoljava uvjet dopustivosti, a signal $x(\cdot)$ zadovoljava izraz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt < \infty$$

Korištenjem inverzne transformacije možemo dobiti $x(\cdot)$ iz njegove CWT:

$$x(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x, \psi_{\lambda,u} \rangle \psi_{\lambda,u}(t) dt d\lambda$$

Gdje je C_{ψ} definirana

$$C_{\psi} \equiv \int_0^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{f} df$$

Dakle, signal $x(\cdot)$ i njegova CWT su dva oblika iste pojave.

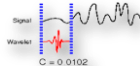
CWT predstavlja signal $x(\cdot)$ na novi, različiti način, koji nam omogućava da stekemo novi i drugačiji, a inače skriven, uvid u signal.

Kontinuirana Wavelet Transformacija u pet koraka

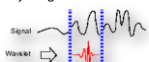
CWT koeficijenti eksplicitno ovise o analitičkom valiću. Dakle, CWT koeficijenti će biti različiti pri proračunu CWT za isti signal primjenom različitih valića.

1. Odaberemo valić pa ga usporedimo sa početnim dijelom izvornog signala.

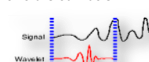
2. Izračunaj C koji pokazuje podudaranje valića sa signalom. Što je C veće sličnost je veća.



3. Translatiramo valić na desno pa ponavljamo korak 1 i 2 sve dok ne prijedemo cijeli signal.



4. Skaliramo (rastegnemo) valić pa ponavljamo korake od 1 do 3.



To slijedi iz činjenice da se CWT koeficijenti računaju unutarnjim produktom. Ako je energija signala i energija valića jednaka, C se interpretira kao korelacijski koeficijent. Općenito, energija signala nije nikada jednaka jedan, pa CWT koeficijente ne možemo direktno interpretirati kao korelacijske koeficijente.

5. Ponavljamo korake od 1 do 4 za sve skale

Diskretna i multirezolucijska analiza

Diskretna Wavelet Transformacija (DWT).

Analiza signala korištenjem CWT pruža mnoštvo informacija. Signal se analizira unutar beskonačno velikog broja dilatacija i translacija matičnog valića. Zbog toga u CWT postoji vrlo velika *redundancija*. Ključne karakteristike transformacije zadržavamo tako što promatramo poduzorke CWT. Tako dolazimo do diskretne *wavelet transformacije* (DWT).

DWT

operira sa diskretno sempliranim funkcijama ili vremenskim redovima $x(\cdot)$, najčešće određujući konačno vrijeme $t = 0, 1, \dots, N - 1$. Analizira vremenske redove za diskretne dilatacije i translacije matičnog valića $\psi(\cdot)$. Općenito, koriste se *dijadičke skale* vrijednosti dilatacija $\lambda(t, j, \lambda)$ je u obliku 2^{j-1} , $j = 1, 2, 3, \dots$. Vrijednosti translacije t onda se sempliraju u intervalima 2^j , pri analizi unutar dilatacije 2^{j-1} .

Multirezolucijska Analiza (MRA)

predstavlja samu bit teorije valića. Ona nam pokazuje kako se temeljni *ortonormalni* valići koriste kao alati pri matematičkom *pristupu informacije* koja je potrebna za pomak sa grube aproksimacije na višu rezoluciju.

Osnovne funkcije WT

Osnovne funkcije nazivaju se valići *wavelets*

Ortogonalna:

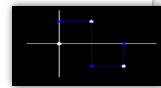
Produkt dva elementa v_1 i v_2 unutar prostora E su ortogonalna ako im je unutrašnji produkt $\langle v_1, v_2 \rangle$ jednak 0.

Ortonormalna:

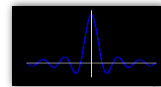
Dva vektora v_1 i v_2 su ortonormalna ako su ortogonalna i jedninične dužine.

Važno svojstvo valića:

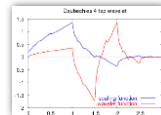
- Sve temeljne funkcije su skalirane i translirane kopije istog matičnog valića.
- Vještim projektiranjem matičnog valića, ove skalirane i translirane kopije mogu se napraviti *ortonormalne* ili bar linearno neovisne.
- Karakteristike polaznih valnih oblika nakon Wavelet transformacije *ostaju sačuvane* pa se može lako napraviti inverzna transformacija bez gubitka podataka



Haar



Mexican Hat



Daubechies (ortonormalni)

Daubechie diskretni valić

Poznata su nam tri svojstva koje funkcija mora zadovoljiti kako bi se mogla klasificirati kao valić. Kako bi valić i pridružena funkcija skaliranja (h su koeficijenti) bila korisna za DWT, postoje još neki uvjeti koje mora zadovoljiti:

$$\sum_{n} h_n = \sqrt{2}$$

$$\sum_{n} (-1)^n h_n = 0, \text{ za } m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$\sum_{n} h_n h_{n+2m} = \begin{cases} 0 & \text{za } m = 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ 1 & \text{za } m = 0 \end{cases}$$

Ingrid Daubechies je otkrila klasu valića koji su karakterizirani ortonormalnim temeljnim funkcijama. Matični valić je **ortonormalan** na svaku funkciju dobivenu pomakom višekratnika 2^j i dilatacijom faktorom 2^j (gdje je $j \in \mathbb{Z}$).

Haar valić ima elemente klase diskretnih Daubechies valića. Lako se može pokazati da su gornji uvjeti zadovoljeni u slučaju Haar valića, $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$

Daubechies $D(4)$ valić ima četiri člana iste klase. Četiri koeficijenta funkcije skaliranja, koji rješavaju gore prikazane jednadžbe za $N = 4$, su

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

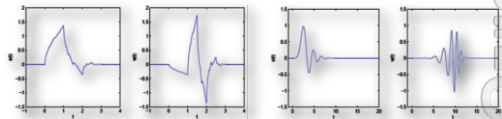
Ozren Bilan

19

Pri wavelet analizi najčešće se koristi **Daubechie ortonormalni valić** s do 20 parnih koeficijenata. Valići postaju glatkiji i oscilatorniji porastom broja koeficijenata. U ovisnosti o prirodi signala koji se analizira bira se specifični Daubechies valić. Ako primjenom Daubechies valića ne uspijemo dobro prikazati signal, bira se drugi tip valića. Izbor najboljeg valića izuzetno je važan kako bi se dobili željeni rezultati.

Općenito, najuži valići poput Haar ili $D(4)$ mogu izvući fine razine detalja ali istovremeno pri analizi oni mogu unijeti neželjene učinke. Viša razina detalja može biti nerealna. Valići s dužim trajanjem mogu bolje prikazati opće karakteristike signala ali zahtijevaju duže proračune i rezultiraju oslabljenim lokalizacijama diskontinuiteta.

Razuman izbor je korištenje **najmanjeg valića koji daje zadovoljavajući rezultat**.



Ozren Bilan

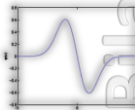
20

Opisat ćemo uobičajene i najčešće valiće koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

Gausova derivacija Gaussian Derivative.

Gaussova funkcija lokalizirana je u vremenskom i frekvencijskom području. Uz to je i diferencijabilna funkcija. Dakle, bilo koja derivacija Gaussove funkcije može se koristiti kao temelj wavelet transformacije. *Gaussian first derivative wavelet*, prikazan na slici definira se izrazom:

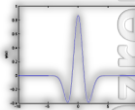
$$\psi(u) = -u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$



Mexican hat

Funkcija je druga derivacija Gaussove funkcije. Nakon normalizacije kojom zadovoljavamo drugo svojstvo valića dobivamo izraz:

$$\psi(u) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1 - u^2) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$



Ozren Bilan

21

MATLAB funkcije obitelji valića

Wavelet Family Short Name	Wavelet Family Name
'haar'	Haar wavelet
'db'	Daubechies wavelets
'sym'	Symlets
'coif'	Coiiflets
'bior'	Biorthogonal wavelets
'rbio'	Reverse biorthogonal wavelets
'meyr'	Meyer wavelet
'dmev'	Discrete approximation of Meyer wavelet
'gaus'	Gaussian wavelets
'mexh'	Mexican hat wavelet
'morl'	Morlet wavelet
'cgau'	Complex Gaussian wavelets
'shan'	Shannon wavelets
'fbsp'	Frequency B-Spline wavelets
'cmor'	Complex Morlet wavelets

Ozren Bilan

22

Valići u Matlabu

Kako bi prikazali detaljne informacije o **Daubechies' least asymmetric orthogonal wavelets**, upisat ćemo:

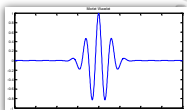
```
waveinfo('sym')
```

Kako bi izračunali wavelet i funkciju skaliranja, ako postoji, koristimo funkciju *wavefun*. *Morlet wavelet* je prikladan za kontinuiranu analizu. *Morlet wavelet* nema pridruženu funkciju skaliranja. Kako bi izračunali *Morlet wavelet*, upisat ćemo:

```
[psi,xval] = wavefun('morl',10);
plot(xval,psi); title('Morlet Wavelet');
```

```
>> waveinfo('sym')
In formation on near symmetric wavelets.
```

```
Symbolic Wavelets
General characteristics: Compactly supported wavelets with
fast asymptotic vanishing number of vanishing moments.
As a collection of functions, they are near linear phase filters.
Family Symbolic
Number of vanishing moments 4
Order N 2
Scale range N = 2, 3, 4
Orthogonal yes
Biorthogonal yes
Compact support yes
DWT possible
CWT possible
Support width 204.8
Filters length 2048
Redundancy
Symmetry near from
Number of vanishing moments for psi 4
Number of vanishing moments for xval 4
For functions on wavelets,
CMBE, SMIKE, e1, S194, S188-202 and S194-216.
```

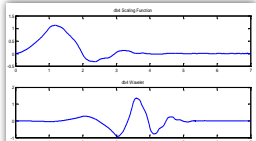


Ozren Bilan

23

Valićima pridruženim **multirezolucijskoj analizi**, može se odrediti **funkcija skaliranja** i valić. Slijedeći Matlab kod vraća funkciju skaliranja i valić za *Daubechies extremal phase wavelet* s 4 *vanishing momenta*.

```
[phi,psi,xval] = wavefun('db4',10);
subplot(211);
plot(xval,phi);
title('db4 Scaling Function');
subplot(212);
plot(xval,psi); title('db4 Wavelet');
```



U diskretnoj *wavelet analizi*, daleko su značajniji filteri analize i sinteze od pridruženih funkcija skale i valića. Moguće je koristiti **wfilters** kako bi se dobili filteri analize i sinteze.

Ozren Bilan

24

Mexican Hat Wavelet: *mexh*

Ovaj valić je proporcionalan funkciji druge derivacije Gaussove gustoće vjerojatnosti.

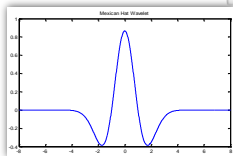
Ovaj valić je posebni slučaj velike obitelji derivacije Gaussovih (*DOG*) valića.

S ovim valićem nije pridružena funkcija skaliranja.

Upišemo li *waveinfo('mexh')* u MATLAB komandni prompt dobit ćemo pregled glavnih svojstava ovog valića.

Valić se može izračunati pomoću *wavefun*.

```
[psi,xval] = wavefun('mexh',10);
plot(xval,psi); title('Mexican Hat Wavelet');
```



Ozren Bilan 25

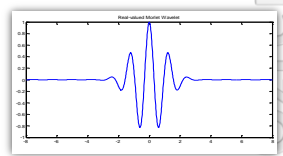
Morlet Wavelet: *morl*

Ovaj valić postoji u realnoj i kompleksnoj inačici. Upišemo li *waveinfo('morl')* u MATLAB komandni prompt dobit ćemo svojstva *realnog Morlet valića*.

Realni *Morlet valić* određen je izrazom: $\psi(x) = Ce^{-x^2} \cos(5x)$

Konstanta C se koristi za normalizaciju u smislu rekonstrukcije.

```
[psi,xval] = wavefun('morl',10);
plot(xval,psi);
title('Real-valued Morlet Wavelet');
```



Ozren Bilan 26

Temeljna teorija valića

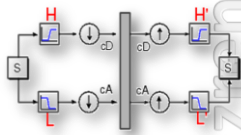
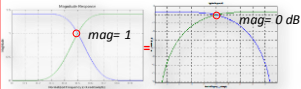
Analiza valićem može se shvatiti kao oblik **pod-pojasnog kodiranja** s kvadratnim zrcalnim filterima. Osnovni procesi s valićem su **dekompozicija** i **rekonstrukcija**

Dekompozicija valića

Jednoražinska dekompozicija: signal se propušta kroz 2 komplementarna filtera: niskopropusni i visokopropusni. Izlaz niskopropusnog filtera daje aproksimaciju (A) koeficijenta, a visokopropusni filter daje detalj (D) koeficijenta

Rekonstrukcija valića

A i D koeficijenti idealno rekonstruiraju signal pri propusku kroz zrcalni rekonstrukcijski filter iz obitelji valića.



Dekompozicija valića Rekonstrukcija valića

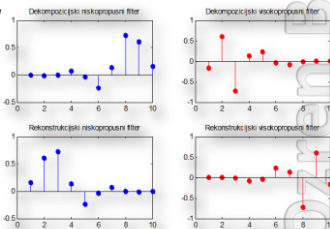
Ozren Bilan 27

Obitelji valića

Obitelj valića sastoji se od skupa kvadratnih zrcalnih filtera sa svojstvom idealne rekonstrukcije. *Obitelj valića* potpuno je određena impulsnim odzivom skupa od 4 filtera.

Primer:
Skup filtera Daubechies-5 obitelji valića

```
% Određujemo tip valića Daubechies 5
wname = 'db5';
% Računamo četiri pridružena filtera
određenom tipu valića prema stringu
wname.
[Lo, DLo, DLo_R, HI, R] = wfilters(wname);
subplot(2,2,1);
stem(Lo, DLo);
title('Dekompozicijski niskopropusni filter');
subplot(2,2,2);
stem(HI, D);
title('Dekompozicijski visokopropusni filter');
subplot(2,2,3);
stem(Lo, R);
title('Rekonstrukcijski niskopropusni filter');
subplot(2,2,4);
stem(HI, R);
title('Rekonstrukcijski visokopropusni filter');
xlabel('Obitelj četiri db5 filtera')
```

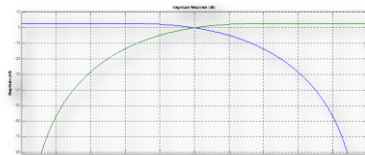


Ozren Bilan 28

Skup filtera obitelji valića Daubechies-5

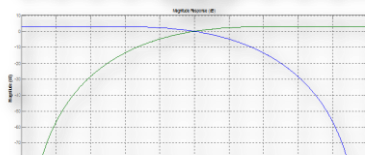
ftool(Lo_D,1,HI_D,1)

Dekompozicijski filter



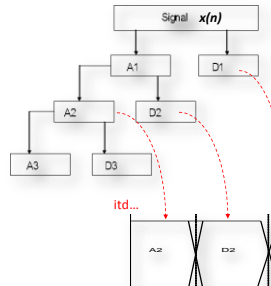
ftool(Lo_R,1,HI_R,1)

Rekonstrukcijski filter



Ozren Bilan 29

Višerazinska dekompozicija signala s valićem



Stablo dekompozicije shematski opisujemo izrazom: $A_j = A_{j+1} + D_{j+1}$

Polazni signal $x(n)$ dijeli se na dva dijela: aproksimaciju A_1 s niskofrekvencijskim komponentama od 0 do $fs/2$, te signala detalja D_1 gornje polovine spektra od $fs/2$ do fs . Iteriranje se može nastaviti po volji.

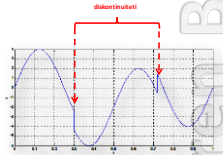
Višerazinska dekompozicija signal s frekvencijskim područjem valića - podpojasno kodiranje

Ozren Bilan 30

PRIMJERI: lokalizacija diskontinuiteta s nedecimiranom Wavelet Transformacijom

Diskontinuitet lokaliziramo finom skalom nedecimiranim koeficijentima wavelet transformacije. Kreiramo signal koji se sastoji od sinusoida $1/2$ -Hz semplirane frekvencijom 1 kHz s diskontinuitetima na 0.3 i 0.72 s.

```
t = linspace(0,1,1000); x = 4*sin(4*pi*t);
x = x - sign(t - .3) - sign(.72 - t);
plot(t,x);
xlabel('t');
ylabel('x');
grid on;
```

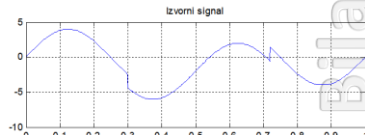


Vršimo nedecimiranu wavelet transformaciju ulaznog signala četvrte razine primjenom *Daubechies extremal phase wavelet* s 2 vanishing momenta i *Podršeni half-point symetrični extension mode*. Rekonstruiramo aproksimaciju signala temeljem wavelet koeficijenata prve razine.

```
W = ndwt(x,4,'db2','mode','per');
d1 = indwt(W,'d',1);
```

Grafički ćemo prikazati valni oblik izvornog signala i aproksimaciju signala da bi vizualizirali kako koeficijenti valića lokaliziraju diskontinuitete.

```
subplot(2,1,1);
plot(t,x);
title('Izvorni signal');
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(t,d1,'r','linewidth',2);
```



```
title('1 razinska
aproksimacija valićem');
grid on;
```

1 razinska aproksimacija valićem

koeficijenti valića lokalizirali su diskontinuitete

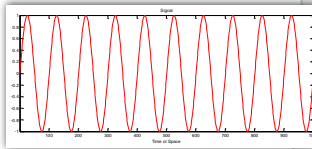
Wavelet skalogram primjenom 1D Wavelet analize

Pokazat ćemo kako dobiti spektralnu informaciju signala primjenom *kontinuirane wavelet transformacije*. U Matlabu mora biti instaliran *Signal Processing Toolbox*. Najbolji alat za analizu spektra signala je FFT, iako valići nisu projektirani za spektralnu analizu, njihovom primjenom možemo dobiti neke informacije o spektru. Izvest ćemo *Fourierovu analizu* i *wavelet analizu* raznih elementarnih periodičkih signala. Nakon toga usporedit ćemo dobivene spektralne informacije.

Analiza elementarnog periodičnog signala

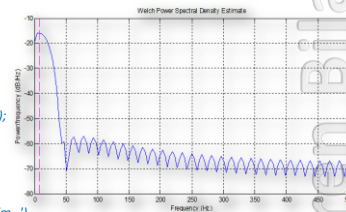
Definiramo vrlo jednostavan periodični sinusni signal frekvencijom $F_{rq} = 10$.

```
Fs = 1000;
t = 0:1/Fs:1;
Frq = 10;
x = sin(2*pi*t*Frq);
plot(x,'r'); axis tight
title('Signal');
xlabel('Time or Space')
```



Računamo gustoću spektra snage PSD spektralnom estimacijom signala. Nakon toga, odredit ćemo temeljnu frekvenciju analizom gustoće spektra i lociranjem frekvencije na kojoj je PSD maksimalan.

```
h = spectrum(welch);
Hpsd = psd(h,x,'Fs',Fs);
hLIN = plot(Hpsd);
xdata = get(hLIN,'XData');
ydata = get(hLIN,'YData');
[dummy,idxMax] = max(ydata);
FreqMax = xdata(idxMax)
hold on
ylim = get(gca,'YLim');
```



```
plot([FreqMax,FreqMax],ylim,'m--')
FreqMax = 7.8125
```

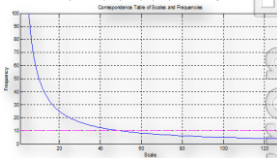
Dobiveni rezultat je *približna vrijednost prave frekvencije*.

Izračunat ćemo kontinuiranu wavelet transformaciju primjenom valića *gaus4* pa ćemo vidjeti gdje se nalaze spektralne informacije.

```
wname = 'gaus4';
scales = 1:1:128;
coefs = cwt(x,scales,wname);
```

Primjenom funkcije *sca2Freq*, računamo tablicu podudaranja skala i frekvencija. Tablice ovisi o izabranom valiću. Tražimo skalu koja se podudara s frekvencijom F_{rq} kojom je projektiran signal

```
TAB_Sca2Frq = sca2Frq(scales,wname,1/Fs);
cf; plot(TAB_Sca2Frq); axis tight; grid
hold on
plot([scales(1),scales(end)],[Frq Frq], 'm--')
set(gca,'YLim',[0 100])
title('Correspondence Table of Scales and Frequencies');
xlabel('Scale')
ylabel('Frequency')
```

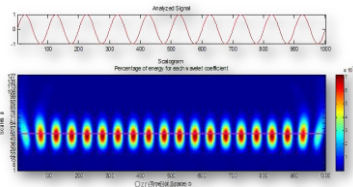


Odredit ćemo skalu *Sca* koja odgovara frekvenciji F_{rq} za valić *gaus4*.

```
[~,idxSca] = min(abs(TAB_Sca2Frq-Frq));
Sca = scales(idxSca)
Sca = 50
```

Koristimo kontinuiranu wavelet analizu kako bi izračunali *skalogram koeficijena valića* primjenom valića *gaus4*. Nacrtat ćemo skalogram i jednu vodoravnu liniju koja odgovara pridruženoj skali *Sca* povezanoj s frekvencijom F_{rq} . Linija povezuje maksimume energije skalograma.

```
wscalogram('image',coefs,'scales',scales,'ydata',x);
hold on
plot([1 size(coefs,2)],[Sca Sca], 'Color','m','LineWidth',2);
```



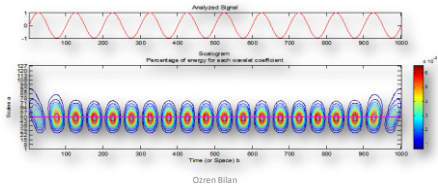
Skalogram pokazuje maksimalnu energiju pri skali 50, što odgovara frekvenciji 10. Ovaj postupak primjene valića omogućava dobivanje spektralne informacije.

Spektralnu informaciju možemo pokazati i *konturnim dijagramom*.

```
clf; coefs = cwt(x,scales,wname,'scalCNT');
hold on
plot([1 size(coefs,2)],[Sca Sca], 'Color','m','LineWidth',2);
```

Položaj frekvencijske informacije u skalogramu ovisi o primijenjenom valićetu za analizu. Neki valići vrlo dobro detektiraju frekvencijske lokacije. Pokazat ćemo koliko su različiti učinkoviti u toj zadaći.

Vrijednost skale *Sca* koja odgovara frekvenciji *Frq* također ovisi o tipu primijenjenog valića.

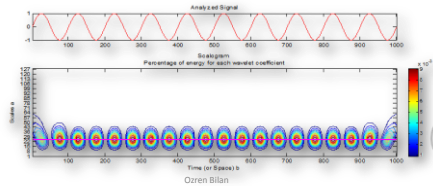


37

Dobra detekcija s Mexican hat valićem

```
wname = 'mexh';
TAB_Sca2Frq = scal2frq(scales,wname,1/Fs);
[~,idxSca] = min(abs(TAB_Sca2Frq-Frq));
Sca = scales(idxSca)
```

```
Sca = 25
clf; coefs = cwt(x,scales,wname,'scalCNT');
hold on
plot([1 size(coefs,2)],[Sca Sca], 'Color','m','LineWidth',2);
```

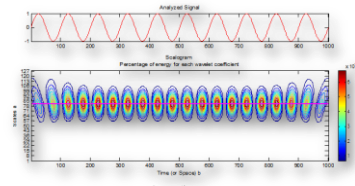


38

Dobra detekcija s Morlet valićem

```
wname = 'morl';
TAB_Sca2Frq = scal2frq(scales,wname,1/Fs);
[~,idxSca] = min(abs(TAB_Sca2Frq-Frq));
Sca = scales(idxSca)
```

```
Sca = 81
clf; coefs = cwt(x,scales,wname,'scalCNT');
hold on
plot([1 size(coefs,2)],[Sca Sca], 'Color','m','LineWidth',2);
```

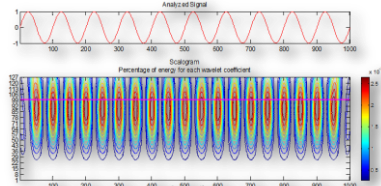


39

Loša detekcija s Haar valićem

```
wname = 'haar';
TAB_Sca2Frq = scal2frq(scales,wname,1/Fs);
[~,idxSca] = min(abs(TAB_Sca2Frq-Frq));
Sca = scales(idxSca)
```

```
Sca = 100
clf; coefs = cwt(x,scales,wname,'scalCNT');
hold on
plot([1 size(coefs,2)],[Sca Sca], 'Color','m','LineWidth',2);
```



40

Složenija estimacija signala temeljena na analizi valićem

Estimacija signala je proces procjene signala koji je skriven šumom u promatranom vremenskom intervalu. Kako bi mogli primijeniti wavelet modifikirat ćemo wavelet transformaciju, tako da primjenom inverzne transformacije realiziramo estimaciju promatranog signala.

Eliminiranje šuma iz signala primjenom valića

Cilj vježbe: Naučiti što je valić i ilustrirati primjenu objekata sustava *DyadicAnalysis* i *DyadicSynthesis* u cijlu eliminiranja šuma iz audio signala.

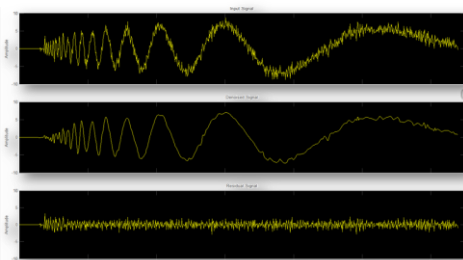
Teoretska obrada

Wavelet ima važnu primjenu pri eliminiranju šuma iz signala. Nakon dekompozicije signala pomoću valića, visokofrekvencijski potpojasovi sadrže najveću količinu šuma, a vrlo malo signala. U ovom programu primijenit ćemo *mekano* razlaganje na različite potpojasove. Najviša vrijednost praga bit će postavljena na visokofrekvencijske potpojasove, a vrlo niske vrijednosti praga bit će na niskofrekvencijskim potpojasima.

Program

```
load dglwlets; % load wavelet coefficients and noisy signal
Threshold = [3 2 1];
% Create a SignalReader System object to output the noisy signal
hsr = dsp.SignalReader('loadapp', 64);
% Create and configure a DyadicAnalysisFilterbank System object for wavelet
decomposition of the signal
hdyaAnalysis = dsp.DyadicAnalysisFilterbank(...
    CustomCoeffsFilter, hsr, ...
    CustomHighpassFilter, hsr, ...
    NumLevels, 8);
% Create three Delay System objects to compensate for the system delay
introduced by the wavelet components.
hdelay1 = dsp.Delay('length(hsr.S1)');
hdelay2 = dsp.Delay('length(hsr.S2)');
hdelay3 = dsp.Delay('length(hsr.S3)');
% Create and configure a DyadicSynthesisFilterbank System object for wavelet
reconstruction of the signal
hdyaSynthesis = dsp.DyadicSynthesisFilterbank(...
    CustomLowpassFilter, hsr, ...
    CustomHighpassFilter, hsr, ...
    NumLevels, 8);
% Create time scope System object to plot the original, denoised and residual
signals.
hts = dsp.TimeScope('Name','Wavelet Denoising',...
    'SampleRate',Fs,...
    'TimeScope',18,...
    'NumInputPorts',3,...
    'LayoutDimensions',[3,1],...
    'TimeAxisLabel','Time(s)');
pos = hts.Position;
hts.Position = [pos(1) pos(2) (0.5*pos(4)) 0.9*pos(3) 1.2*pos(4)];

% Set properties for each display
hts.ActiveDisplay = 2;
hts.Title = 'Input Signal';
hts.ActiveDisplay = 2;
hts.Title = 'Denoised Signal';
hts.ActiveDisplay = 3;
hts.Title = 'Residual Signal';
% Stream processing loop
% Create a processing loop to denoise the input signal. This loop uses the System
object you just instantiated above.
for i = 1:length(hs.InputSignal)
    sig = step(hsr); % Input noisy signal
    S = step(hdyaAnalysis, sig); % Dyadic analysis
    % separate into four subbands
    S1 = S(1:32); S2 = S(33:64); S3 = S(65:96); S4 = S(97:64);
    % Delay to compensate for the dyadic analysis filters
    S1 = step(hdelay1, S1);
    S2 = step(hdelay2, S2);
    S3 = dsp.OscZones(S2, Threshold(1));
    S4 = dsp.OscZones(S3, Threshold(2));
    S2 = dsp.OscZones(S1, Threshold(3));
    S4 = dsp.OscZones(S4, Threshold(4));
    % Dyadic synthesis (on concatenated subbands)
    S = step(hdyaSynthesis, [S1 S2 S3 S4]);
    sig_denoise = step(hdelay3, sig);
    % Delay to compensate for analysis/synthesis.
    Error = sig_denoise - S;
    % Plot the results
    step(hts, sig_denoise, S, Error);
end
```



Zaključak

U programu smo koristili **signal processing System objekte** kao što su **DyadicAnalysisFilterBank** i **DyadicSynthesisFilterBank** kako bi eliminirali šum iz signala primjenom praga kojeg smo sami odredili. **Input Signal window** prikazuje izvorni signal sa šumom, **Denoised Signal window** prikazuje signal nakon potiskivanja šuma, a **Residue Signal window** pokazuje grešku izvornog signala i onog s potisnutim šumom.

Ozren Bilan

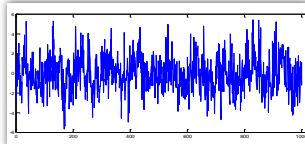
43

Wavelet analiza signala uronjenog u šum

Definirajmo periodički signal koji predstavlja sumu dvije sinusoidne frekvencije F1=10 i F2=40 Hz pomiješane s normalno distribuiranim bijelim šumom. Prikazat ćemo gustoću spektra snage ovog signala spektralnom estimacijom i kontinuiranom wavelet transformacijom. Koristit ćemo wavelet **gaus4**.

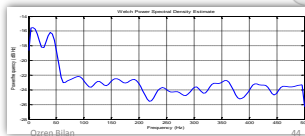
U Matlabu gradimo analitički signal.

```
F1 = 10;
F2 = 40;
Fs = 1000;
t = 0:1/Fs:1;
x = sin(2*pi*t*F1) + sin(2*pi*t*F2);
wn = randn(1,length(x));
wn = 1.5*wn/std(wn);
xn = x + wn;
plot(xn)
```



Računamo i prikazujemo gustoću spektra snage signala.

```
h = spectrum(welch);
Hpsd = psd(h,xn,Fs,'Fs');
clf; hLN = plot(Hpsd);
ydata_XN = get(hLN,'ydata');
```



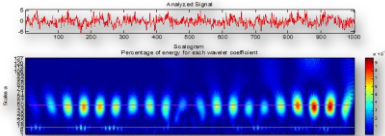
Računamo korespondencijsku tablicu vrijednosti skale i frekvencije **gaus4** waveleta. Pa određujemo skale koje odgovaraju frekvencijama F1 = 10 i F2 = 40.

```
wname = 'gaus4';
scales = 1:1:128;
TAB_Sca2Frq = sca2frq(scales,wname,1/Fs);
[~,idxSca_1] = min(abs(TAB_Sca2Frq-F1));
Sca_1 = scales(idxSca_1);
[~,idxSca_2] = min(abs(TAB_Sca2Frq-F2));
Sca_2 = scales(idxSca_2);
```

Izračunat ćemo kontinuiranu wavelet transformaciju signala i zatim ćemo nacrtati skalogram wavelet koeficijenta i dvije vodoravne linije koje odgovaraju skalama Sca_1 i Sca_2 povezanim s frekvencijama F1 i F2.

```
coefs = cwt(xn,scales,wname);
clf; wscalogram('image',coefs,'scales','ydata',xn);
hold on
plot([1 size(coefs,2)],[Sca_1 Sca_2], 'Color','m','LineWidth',2);
plot([1 size(coefs,2)],[Sca_2 Sca_2], 'Color','w','LineWidth',1);
```

Sca_1 = 50
Sca_2 = 13



Iako je dijagram nešto manje jasan nego u slučaju bez šuma, možemo vidjeti da su linije još uvijek povezane s lokalnim maksimumima energije u skalogramu.

Ozren Bilan

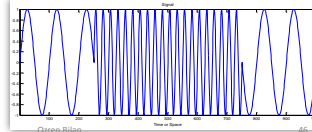
45

Analiza složenijeg signala

Generirat ćemo složeniji signal sastavljen od različitih sinusnih funkcija definiranih u tri susjedna intervala; frekvencija je F1 = 10 u intervalima [0 0.25] i [0.75 1] što odgovara indeksima 1:250 i 750:1000 i frekvencija F2 = 40 u intervalu [0.25 0.75] što odgovara indeksima 251:749.

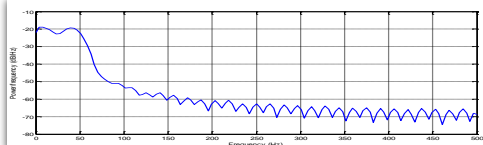
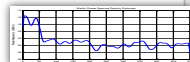
U Matlabu gradimo analitički signal.

```
F1 = 10;
F2 = 40;
Fs = 1000;
t = 0:1/Fs:1;
x = sin(2*pi*t*F1).*(t<0.25)+(t>0.75) + sin(2*pi*t*F2).*(t>0.25).*(t<0.75);
plot(x)
%Prikaz signala
clf;
plot(x);axis tight
title('Signal');
xlabel('vrijeme ili prostora')
```



Izračunat ćemo i prikazati grafički PSD signala.

```
h = spectrum(welch);
Hpsd = psd(h,x,Fs,'Fs');
clf; plot(Hpsd);
```



Spektar je vrlo sličan onome koji smo dobili u slučaju sume dva sinusna signala. Ne postoji informacija o lokaciji bilo kojeg događaja ni vremenski ni prostorno.

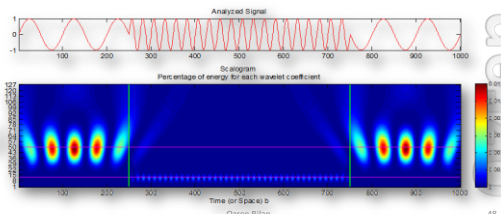
Izračunat ćemo kontinuiranu wavelet transformaciju signala i prikazat ćemo skalogram wavelet koeficijenta kao i dvije vodoravne linije koje odgovaraju skalama Sca_1 i Sca_2 koje su povezane s frekvencijama F1 i F2. Nacrtat ćemo i dvije okomite linije koje dijele intervale.

Ozren Bilan

47

```
wname = 'gaus4';
scales = 1:1:128;
coefs = cwt(x,scales,wname);
clf; wscalogram('image',coefs,'scales','ydata',x);
hold on
plot([1 size(coefs,2)],[Sca_1 Sca_1], 'Color','m');
plot([1 size(coefs,2)],[Sca_2 Sca_2], 'Color','m');
plot([250 250],[1 128], 'Color','g','LineWidth',2);
plot([750 750],[1 128], 'Color','g','LineWidth',2);
```

Wavelet analiza je učinkovita za detekciju vremenskih i prostornih događaja. Intervali s različitim frekvencijama se jasno detektiraju.

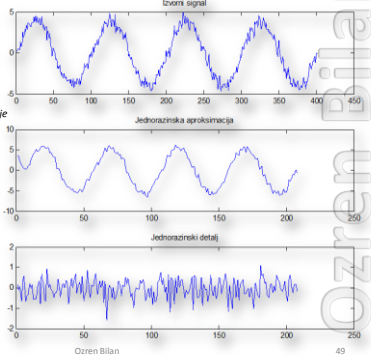


Ozren Bilan

48

Jednorazinska dekompozicija signala sa šumom

```
x=analog(100,4,40,10000);
% sinusoida frekvencije 100 Hz
% amplituda 1
xn=x+0.5*randn(size(x));
% dodajemo Gaussov šum
[A,C,D]=rdwt(kn,'db8');
% računamo prvu razinu dekompozicije
% s dwi i valićem Daubechies 8
subplot(3,1,1),
plot(xn),
title('Izvorni signal')
subplot(3,1,2),
plot(A),
title('Jednorazinska aproksimacija')
subplot(3,1,3),
plot(C,D),
title('Jednorazinski detalj')
```

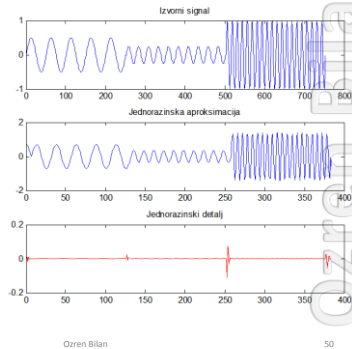


Jednorazinska dekompozicija signala sa šumom s valićem obitelji Daubechies 8

Ozren Bilan 49

Jednorazinska dekompozicija nestacionarnog signala

```
fs=2500;
len=100;
[x2,1]=analog(50,5,len,fs);
% vremenski vektor t1 je u ms
[x2,12]=analog(100,25,len,fs);
[x3,13]=analog(200,1,len,fs);
y1=csc(2,1,2,2,3);
% ulančavamo signale
ty1=1,1,12-len,13-2*len;
% ulančavamo vektore vremena
% t1 u len, len u 2*len...
[A1,D1]=rdwt(y1,'db8');
subplot(3,1,1),
plot(ty1),
title('Izvorni signal')
subplot(3,1,2),
plot(A1),
title('Jednorazinska aproksimacija')
subplot(3,1,3),
plot(D1,'r'),
title('Jednorazinski detalj')
```



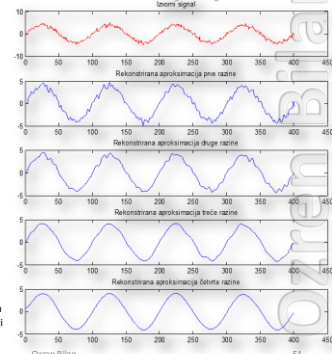
Koeficijenti detalja otkrivaju prijelaze nestacionarnog signala

Ozren Bilan 50

Eliminiranje šuma iz signala višerazinskom dekompozicijom valića

```
x=analog(100,4,40,10000);
xn=x+0.5*randn(size(x));
[C,L]=wavedec(x,'db8');
% Višerazinska analiza do 4 razine sa valićem Daubechies 8
A1 = wrcoef('a','C,L','db8',1);
% Rekonstruiraj aproksimaciju na 4 razine
A2 = wrcoef('a','C,L','db8',2);
A3 = wrcoef('a','C,L','db8',3);
A4 = wrcoef('a','C,L','db8',4);
subplot(5,1,1),
plot(xn,'r'),
title('Izvorni signal')
subplot(5,1,2),
plot(A1),
title('Rekonstruirana aproksimacija prve razine')
subplot(5,1,3),
plot(A2),
title('Rekonstruirana aproksimacija druge razine')
subplot(5,1,4),
plot(A3),
title('Rekonstruirana aproksimacija treće razine')
subplot(5,1,5),
plot(A4),
title('Rekonstruirana aproksimacija četvrtne razine')
```

Značajna eliminacija šuma pojavljuje se na četvrtoj razini, aproksimacijski koeficijenti valića Daubechies 8

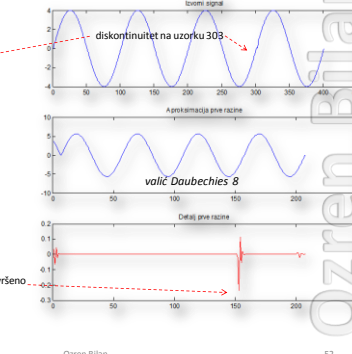


Ozren Bilan 51

Određivanje diskontinuiteta signala

```
x=analog(100,4,40,10000);
x(302:303)=1;
[A,D]=rdwt(x,'db8');
subplot(3,1,1),
plot(x),
title('Izvorni signal')
subplot(3,1,2),
plot(A),
title('Aproksimacija prve razine')
subplot(3,1,3),
plot(D,'r'),
title('Detalj prve razine')
```

Odzv diskontinuiteta 1. razine detalja
Koeficijent detalja je uzorak 151 jer je izvršeno dvostruko poduzorkovanje

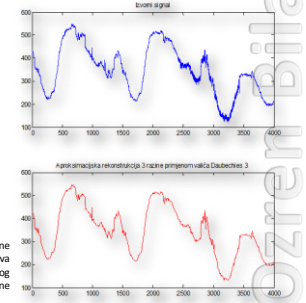


Ozren Bilan 52

Sažimanje signala aproksimacijom pomoću valića

```
load leleccum % datoteka u MATLAB-u
x=leleccum;
w='db3';
[C,L]=wavedec(x,4,w);
A4 = wrcoef('a','C,L','db3',4);
A3 = wrcoef('a','C,L','db3',3);
A2 = wrcoef('a','C,L','db3',2);
A1 = wrcoef('a','C,L','db3',1);
a3 = appcoef(C,L,w,3);
plot(x,axis([0,4000,100,600]))
title('Izvorni signal')
subplot(2,1,2),
plot(A3,'r'),axis([0,4000,100,600])
title('Aproksimacija sa rekonstrukcijom 3 razine primjenom valića Daubechies 3')
length(a3)/length(x)*100
ans =
    12.5926
```

Aproksimacijska rekonstrukcija 3 razine primjenom valića Daubechies 3 sadržava samo 13 % vrijednosti izvornog signala zbog poduzorkovanja valićem, a zadržava važne karakteristike signala.

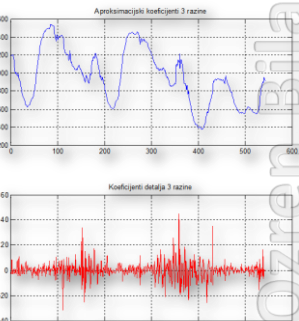


Ozren Bilan 53

Sažimanje postupkom praga Thresholding

```
>> load leleccum
x=leleccum;
w='db3'; % Određujemo valić Daubechies-4
[C,L]=wavedec(x,4,w);
% Višerazinska dekompozicija u 4 razine
a3 = appcoef(C,L,w,3);
% Ekstrakcija aproksimacijskih koeficijenata 3 razine
d3 = detcoef(C,L,3);
% Ekstrakcija koeficijenata detalja 3 razine
subplot(2,1,1),
plot(a3,grid)
title('Aproksimacijski koeficijenti 3 razine')
subplot(2,1,2),
plot(d3,'r',grid)
title('Koeficijenti detalja 3 razine')
```

Prikazani su A3 i D3 koeficijenti signala. Brojne D3 koeficijente moguće je postaviti na nulu, a da se ne izgubi informacija signala ili snaga signala



Ozren Bilan 54

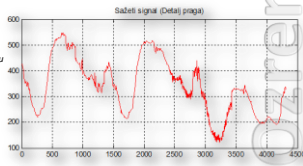
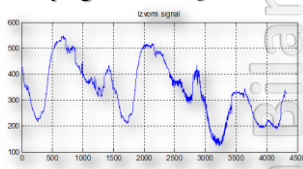
Sažimanje postupkom praga *Thresholding*

```
>> load leleccum
% učitavamo zvučnu datoteku iz Matlaba
x=leleccum; % Nesazeti signal x
w = 'd3'; % Određujemo obitelj valića w
n=3; % Određujemo razinu dekompozicije n
[C1] = wavedec(x,n,w); % Određujemo strukturu dekompozicije x za razinu n
prmjenom w.
thr = 10; % Određujemo vrijednost praga
keepapp = 1; % Logički parametar = koeficijentima aproksimacije ne
% Određujemo strukturu dekompozicije x za razinu n
sorh='h'; % Primjeni tvrdi prag
[xd,cxd,wd,perf0,perf2]
=wdencimf(C1,'C,L,w,n,thr,sorh,keepapp);
subplot(2,1,1),plot(xd,'r'),title('Izvorni signal')
grid
subplot(2,1,2),plot(xd,'r'),title('Sažeti signal (Detalji
praga)')
grid
perf0 % Postotak koeficijenata postavljen na nulu
perf2 % Postotak zadržane energije u sažetom signalu
03.064
perf2 =
99.9943
```

Postupkom sažimanja 83% koeficijenata stavljeno je na nulu, a zadržano je 99,99% energije signala.

Ozren Bilan

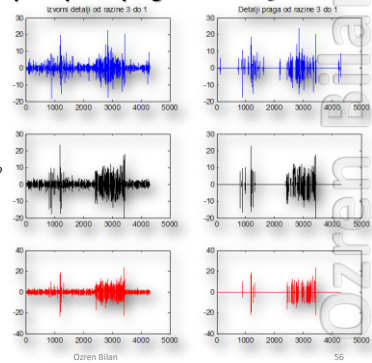
55



Sažimanje postupkom praga *Thresholding*

```
D1 = wrcoef('d',C,L,w,1);
D2 = wrcoef('d',C,L,w,2);
D3 = wrcoef('d',C,L,w,3);
d1 = wrcoef('d',cxd,wd,w,1);
d2 = wrcoef('d',cxd,wd,w,2);
d3 = wrcoef('d',cxd,wd,w,3);
subplot(3,2,1),plot(D3),
title('Izvorni detalji od razine 3
do 1')
subplot(3,2,2),plot(D3),
title('Detalji praga od razine 3
do 1')
subplot(3,2,3),plot(D2,'k')
subplot(3,2,4),plot(D2,'k')
subplot(3,2,5),plot(D1,'r')
subplot(3,2,6),plot(D1,'r')
```

Postavljanje koeficijenata na nulu određivanjem praga učinkovito sažima signal



Ozren Bilan

56

Zaključak

Općenito su najbolji alati spektralne analize temeljeni na *FFT*, međutim, iako *wavelet* nije specifično predviđen za analizu spektra ipak može otkriti spektralne informacije.

Spektralnu analizu prikazali smo postupcima kontinuirane transformacije i funkcije *scal2freq* kako bi odredili ovisnost vrijednosti skale i frekvencije. Točnost tablice ovisi o izborom tipu valića. Nakon toga ispitivali smo skalu u ovisnosti o frekvenciji i obrnuto.

Moramo naglasiti kako prikazani postupci rezultiraju približnim vrijednostima, dakle aproksimacijama. Međutim, **općenito su dovoljno točni primjenjujemo li ih na zvučne signale, a dobivene informacije ne možemo dobiti postupcima FFT.**

Obrada valićem temeljena je na ideji **potpojasne dekompozicije i kodiranja.**

Obitelji valića karakteriziraju **niskopropusni i visokopropusni filteri** koji se koriste za dekompoziciju i idealnu rekonstrukciju signala.

Tipična primjene obrade signala valićem su eliminiranje šuma, sažimanje datoteka i identifikacija tranzijentnih karakteristika signala.

Ozren Bilan

57